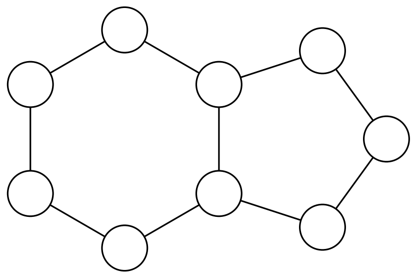
56. ročník Matematické olympiády

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z5

1. *Šestiúhelník a pětiúhelník mají společnou stranu se dvěma vrcholy. Doplň do všech vrcholů obou obrazců čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby součet čísel v šestiúhelníku i v pětiúhelníku byl 24. Každé číslo použij právě jednou. Stačí, když najdeš jedno řešení.*



Řešení. Součet všech doplňovaných čísel je

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Součet čísel ve vrcholech šestiúhelníku má být 24, v pětiúhelníku 24, což je dohromady $24 + 24 = 48$. Protože $48 - 45 = 3$, bude součet čísel ve dvou společných vrcholech obou obrazců roven třem, tj. v jednom vrcholu bude číslo 1, ve druhém vrcholu číslo 2.

Ostatní čísla (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) rozdělíme do dvou skupin tak, aby jejich součet v každé skupině byl $24 - 3 = 21$. Přitom do jedné skupiny vybereme 4 vhodná čísla (tj. do zbývajících vrcholů šestiúhelníku) a do druhé skupiny 3 čísla (tj. do zbývajících vrcholů pětiúhelníku).

Odpověď: Ve společných vrcholech budou čísla 1 a 2. Ostatní čísla:

a) v šestiúhelníku: 3, 5, 6, 7, v pětiúhelníku: 4, 8, 9,
b) v šestiúhelníku: 3, 4, 6, 8, v pětiúhelníku: 5, 7, 9,
c) v šestiúhelníku: 3, 4, 5, 9, v pětiúhelníku: 6, 7, 8.

2. *Cyklistického závodu Tour de Lhota se zúčastnila šestičlenná družstva. V prvních deseti etapách závod nikdo nevzdal. V jedenácté etapě po hromadném pádu odstoupilo 17 cyklistů a v každé další etapě pak jich odstoupilo vždy o 3 méně než v předešlé etapě. Do cíle závěrečné 15. etapy dojelo 53 cyklistů. Kolik družstev se zúčastnilo závodu?*

Řešení. V 11. etapě odstoupilo 17 cyklistů, ve 12. etapě 14 cyklistů, ve 13. etapě 11 cyklistů, ve 14. etapě 8 cyklistů a v 15. etapě 5 cyklistů. Celkem odstoupilo

$$(17 + 14 + 11 + 8 + 5) \text{ cyklistů} = 55 \text{ cyklistů}.$$

Do cíle dojelo 53 cyklistů. Závodu se tedy zúčastnilo $(55 + 53)$ cyklistů $= 108$ cyklistů. Protože 6 cyklistů tvořilo jedno družstvo, 108 cyklistů vytvořilo $(108 : 6)$ družstev $=$ $= 18$ družstev.

Odpověď: Závodu se zúčastnilo celkem 18 družstev cyklistů.

3. *Cvičená blecha Hopsalka stála na hodinách na čísle 12. Hrála s Vaškem takovou hru: Vašek házel kostkou. Kolik ok mu padlo, o tolik čísel poskočila. Po prvním hodu skočila po směru chodu hodinových ručiček, po druhém hodu proti směru hodinových ručiček a po třetím hodu opět po směru hodinových ručiček. Víme, že Vaškovi padla oka 2, 5 a 6, ale nevíme, v jakém pořadí. Na která čísla mohla Hopsalka doskočit po třetím skoku?*

Řešení. Blecha má při třech skocích tyto možnosti:

Jak blecha skákala od čísla 12:	na která čísla se blecha dostala:
$+2-5+6$	2, 9, 3
$+2-6+5$	2, 8, 1
$+5-2+6$	5, 3, 9
$+5-6+2$	5, 11, 1
$+6-2+5$	6, 4, 9
$+6-5+2$	6, 1, 3

Odpověď: Po 3. skoku musela Hopsalka skončit na čísle 1 nebo 3 nebo 9.

4. *Pomocí číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a pomocí dvou desetinných čárek utvoř dvě desetinná čísla tak, aby jejich součet byl co nejmenší. Najdi všechny možnosti. (Každou číslici použij právě jednou.)*

Řešení. Kdybychom napsali dvě nejmenší desetinná čísla se stejným počtem číslic, byla by to čísla 0,246 8 a 1,357 9 nebo čísla 1,246 8 a 0,357 9, atd. V obou případech je součet 1,604 7, to však není nejmenší možný součet.

Nejmenší součet dostaneme, když v prvním čísle umístíme větší číslice co nejdál za desetinnou čárku a druhé číslo složíme jen ze dvou malých číslic. Máme čtyři možnosti:

$$\begin{array}{r} 0{,}345\,678\,9 \\ 1{,}2 \\ \hline 1{,}545\,678\,9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}345\,678\,9 \\ 0{,}2 \\ \hline 1{,}545\,678\,9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}245\,678\,9 \\ 1{,}3 \\ \hline 1{,}545\,678\,9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}245\,678\,9 \\ 0{,}3 \\ \hline 1{,}545\,678\,9 \end{array}$$

Máme čtyři výše uvedené možnosti.

5. *Sedm trpaslíků sbíralo hříbky. V košíčkách měli 34, 19, 50, 44, 31, 28 a 37 hříbků. Sněhurka chtěla stejný počet hříbků na polévku jako na smažení i jako na usušení. Jak rozdělili trpaslíci své košíčky do tří skupin tak, aby počet hříbků v každé skupině byl stejný? (Trpaslíci nesměli hříbky z košíčků vytahovat.)*

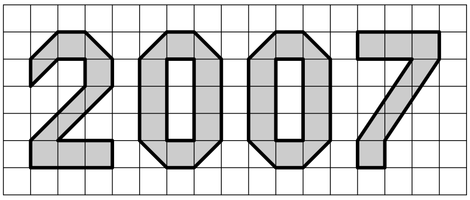
Řešení. Trpaslíci nasbírali celkem

$$(34 + 19 + 50 + 44 + 31 + 28 + 37) \text{ hříbků} = 243 \text{ hříbků}.$$

Když rozdělili všechny hříbky do tří stejných skupin, bylo v jedné skupině 243 hříbků : : 3 = 81 hříbků. Protože trpaslíci nesměli hříbky z košíčků vytahovat, museli do každé skupiny vybrat takové košíčky, ve kterých součet všech hříbků dával číslo 81.

Odpověď: Do jedné skupiny vybrali košíky s 50 hříbky a s 31 hříbky, do druhé skupiny košíky s 44 hříbky a s 37 hříbky. Ve třetí skupině zůstaly košíky s 34 hříbky, 19 hříbky a s 28 hříbky.

6. *Lucka vystřihovala ze čtverečkovaného papíru číslice 2, 0, 0, 7 tak, jak je naznačeno na obrázku. Urči obsah vystřižených číslic, je-li strana čtverečku sítě dlouhá 4 cm.*



Řešení.

Číslice:	Počet čtverečků potřebných k vystřižení číslice:
dvojka	$6 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 6 + 3 = 9$
nula	$8 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 8 + 2 = 10$
sedmička	$4 + (9 - 2 \cdot 3) = 4 + (9 - 6) = 4 + 3 = 7$ (obsah střední části sedmičky vypočteme tak, že od čtverce složeného z 9 čtverečků odečteme dva pravoúhlé trojúhelníky, které (po přiložení k sobě) vytvoří obdélník složený ze 6 čtverečků)

Číslice 2, 0, 0, 7 se skládají z $(9 + 10 + 10 + 7)$ čtverečků $= 36$ čtverečků. Obsah 1 čtverečku je $4 \cdot 4 = 16$, tj. $16\,\text{cm}^2$.

Obsah 36 čtverečků je $576\,\text{cm}^2$.

Obsah vystřižených číslic je $576\,\text{cm}^2$.

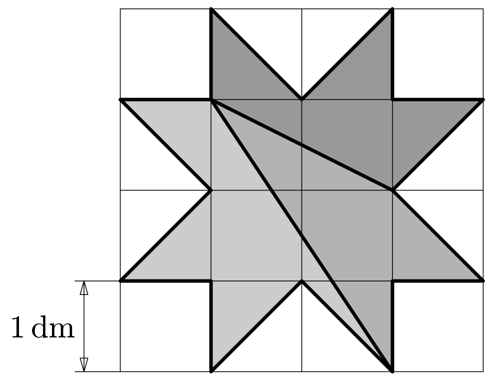
56. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z6

1. *Lukáš natíral laťkový plot. Každých 10 minut natřel 8 latěk. Jeho mladší bratr Ondra mu chvilku pomáhal, takže byl Lukáš hotov o čtvrt hodiny dříve, než předpokládal. Jak dlouho mu Ondra pomáhal, když natřel každých 7 minut 4 laťky?*

ŘEŠENÍ. Nejprve zjistíme, kolik latěk Ondra natřel. Protože Lukáš skončil o 15 minut dřív, natíral by tyto laťky právě 15 minut. Protože za 10 minut natře 8 latěk, za 5 minut natře 4 laťky. Tedy za 15 minut natře celkem 12 latěk. To jsou laťky, které natřel Ondra. Nyní určíme, jak dlouho mu to trvalo. Protože 4 laťky natře za 7 minut, 12 latěk (trojnásobek) natře za $3 \cdot 7 = 21$ minut.

2. *Hvězda na obrázku je rozdělena dvěma úsečkami na tři díly. Zjisti obsah každého z nich.*



ŘEŠENÍ. Při určování obsahů těchto tří částí vyjdeme z toho, že pravoúhlý trojúhelník má poloviční obsah příslušného obdélníku.

Obsah nejtmavší části:

$$S_1 = (2 \cdot 1) : 2 + 3 \cdot (1 \cdot 1) : 2 = 2{,}5 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Obsah středně tmavé části:

$$S_2 = [(3 \cdot 2) : 2 - (2 \cdot 1) : 2] + (1 \cdot 1) : 2 = 2{,}5 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

Obsah světlé části:

$$S_3 = [(3 \cdot 2) : 2 - 2 \cdot (1 \cdot 1) : 2] + 2 \cdot (1 \cdot 1) : 2 = 3 \text{ (dm}^2\text{)}.$$

3. *Vícemístné číslo se nazývá* optimistické, *jestliže jeho číslice zleva doprava rostou. Jestliže číslice čísla zleva doprava klesají, říkáme, že je to číslo* pesimistické. *Součet sedmimístného pesimistického a sedmimístného optimistického čísla složených z týchž číslic je 11 001 000. Které číslice jsme použili na zápis těchto dvou čísel?*

Řešení. Napíšeme si, jak vypadá součet takových dvou čísel:

$$\begin{array}{cccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ & g & f & e & d & c & b & a \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Potřebujeme, aby součet $g + a$ (jednotky) byl roven 10. Víme přitom, že rozdíl g a a je alespoň 6, protože a je první a g je poslední číslice sedmimístného optimistického čísla. V úvahu připadají pouze dvě možnosti: $9 + 1$ a $8 + 2$.

V prvním případě postupně doplníme naznačené sčítání na tvar:

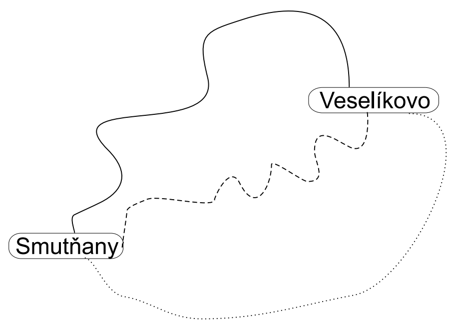
$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ & 9 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Jiná možnost v tomto případě není.

Prověříme druhý případ. Existuje jediné sedmimístné optimistické číslo začínající číslicí 2 a končící číslicí 8, a sice 2 345 678. Snadno se přesvědčíme, že po přičtení čísla 8 765 432 nedostaneme zadaný součet.

4. *Ze Smutňan do Veselíkova vedou tři cesty. Ta, která je na mapě vyznačena plnou čarou, měří 40 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní 80 km/h a vybírá se na ní mýtné 50 Kč. Čárkovaná cesta je dlouhá 35 km, nejvyšší povolená rychlost je na ní 60 km/h a mýtné je 150 Kč. Na tečkované cestě, která je dlouhá 45 km, se vybírá mýtné 100 Kč a nejvyšší povolená rychlost je 100 km/h. Strýček Uspěchaný a tetička Spořivá se chtějí dostat ze Smutňan do Veselíkova, strýček co nejdříve, tetička co nejlevněji. Oba si zavolali taxi, jehož řidiči si účtují 15 Kč za kilometr cesty a zaplacení mýtného.*

1. *Kterou cestu má vybrat taxikář strýčka Uspěchaného?*
2. *Kterou cestu má vybrat taxikář tetičky Spořivé?*
3. *O kolik minut bude kratší cesta strýčka Uspěchaného v porovnání s cestou tetičky?*
4. *O kolik korun zaplatí strýček víc než tetička?*



Řešení. U každé cesty nejprve zjistíme dobu jízdy a cenu:

- ▷ Cesta zakreslená plnou čarou:
  doba jízdy: 80 km za 60 min., tzn. 40 km za 30 min.,
  cena: $40 \cdot 15 + 50 = 650$ Kč.
- ▷ Cesta zakreslená čárkovanou čarou:
  doba jízdy: 60 km za 60 min., tzn. 35 km za 35 min.,
  cena: $35 \cdot 15 + 150 = 675$ Kč.
- ▷ Cesta zakreslená tečkovanou čarou:
  doba jízdy: 100 km za 60 min., tzn. 45 km za 27 min.,
  cena: $45 \cdot 15 + 100 = 775$ Kč.

Nyní můžeme odpovědět na otázky v zadání:

1. Nejrychlejší je cesta vyznačená tečkovaně, tu by si měl vybrat taxikář strýčka Uspěchaného.
2. Nejlevnější je cesta vyznačená plnou čarou, tu by si měl vybrat taxikář tetičky Spořivé.
3. Strýčkova cesta je rychlejší o $30 - 27 = 3$ minuty.
4. Strýček zaplatí víc o $775 - 650 = 125$ Kč.

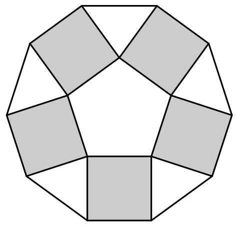
5. *Naše třída plánovala turistický výlet. Jednotlivé skupiny myslely, že jeho délka bude 28, 16, 32, 37 a 15 kilometrů. Spletly se ale o 5, 7, 8, 9 a 14 kilometrů. Jak dlouhý byl výlet?*

Řešení. Seřadíme si tipy podle velikosti: 15, 16, 28, 32, 37 (v km).

Nejprve zjistíme, jestli byl výlet kratší než nejmenší tip (resp. delší než největší tip). To by znamenalo, že by některá chyba byla větší než $37 - 15 = 22$ km. Protože není, je skutečná délka výletu v rozmezí 15 km a 37 km. Potom ale součet některých dvou chyb musí dát 22 km (chyby vztahující se k extrémním tipům). Vyhovuje jediná dvojice 8 km a 14 km. Jsou dvě možnosti:

- ▷ Tip 15 km se od skutečnosti liší o 14 km.
  Potom byl výlet dlouhý $15 + 14 = 29$ km a příslušné chyby by měly hodnoty postupně 14 km, 13 km, 1 km, 3 km a 8 km. To nevyhovuje.
- ▷ Tip 15 km se od skutečnosti liší o 8 km.
  Potom byl výlet dlouhý $15 + 8 = 23$ km a příslušné chyby by měly hodnoty postupně 8 km, 7 km, 5 km, 9 km a 14 km. To už vyhovuje zadání.
  Výlet byl dlouhý 23 km.

6. *Ze shodných čtverců a rovnoramenných trojúhelníků jsme složili (bez překrývání) útvar znázorněný na obrázku. Zjisti velikosti vnitřních úhlů těchto rovnoramenných trojúhelníků.*



Řešení. Protože jsou použité čtverce shodné, je pětiúhelník jimi ohraničený pravidelný. Jeho vnitřní úhel α má velikost:

$$\alpha = 2 \cdot \left[\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{5}\right) : 2\right],$$
$$\alpha = 108^\circ.$$

Rovnoramenný trojúhelník:
Nejprve zjistíme velikost vnitřního úhlu proti základně:

$$360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 108^\circ = 72^\circ.$$

Snadno dopočteme velikosti úhlů při základně:

$$(180^\circ - 72^\circ) : 2 = 54^\circ.$$

Vnitřní úhly rovnoramenných trojúhelníků mají velikosti 72°, 54° a 54°.

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z7

1. *Jana narýsovala šestiúhelník. Délky všech stran vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Potom si uvědomila, že každé dvě jeho sousední strany jsou na sebe kolmé. Narýsuj, jak mohl vypadat Janin šestiúhelník, je-li jeho obvod 16 cm a jeho obsah 12 cm²*.

ŘEŠENÍ. Šestiúhelník $ABCEFG$ vznikne složením pravoúhelníků $ABCD$ o obsahu S_1 a $DEFG$ o obsahu S_2 (E je vnitřním bodem strany CD, D vnitřním bodem strany AG).

Označme

$$|AB| = a,\ |BC| = b,\ |CE| = c,\ |EF| = d,\ |FG| = e,\ |GA| = f,$$
$$S_1 = a \cdot b,\ S_2 = e \cdot d,\ S_1 + S_2 = 12,$$
$$a = e + c,\ f = b + d,\ 2a + 2f = 16,\ a + f = 8.$$

Všechny strany proto musí být menší než 8. Lze řešit probráním všech možností pro $S_1 < 12$, pak volit možnosti pro délku strany a (ze vztahu $S_1 = a \cdot b$) a b, dále zjistit f (ze vztahu $a + f = 8$), d ($f = b + d$), S_2 ($S_1 + S_2 = 12$), e ($S_2 = d \cdot e$), c ($a = e + c$).

Úloha má 3 řešení:
$a = 5,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 1,\ e = 2,\ f = 3$;
$a = 4,\ b = 2,\ c = 2,\ d = 2,\ e = 2,\ f = 4$;
$a = 3,\ b = 2,\ c = 1,\ d = 3,\ e = 2,\ f = 5$.
Vidíme, že první a třetí šestiúhelník jsou shodné.

2. *Rozděl obdélník na obrázku na co nejmenší počet tvarově stejných částí tak, aby každá z nich obsahovala jen taková čísla, která dávají po dělení třemi navzájem různé zbytky. Pozor, řezat se smí jen po čárách sítě!*

		14	*32*		
43	*102*	*11*			*90*
22	*18*		*301*		*7*
	35		*99*	*29*	
12				*62*	

ŘEŠENÍ. V tabulce je vhodné vyznačit čísla, která dávají po dělení třemi týž zbytek (např. stejnou barvou). Pokud dvě sousední čísla dávají různý zbytek, oddělíme je silnou čarou.

Zbytek 0 mají čísla 102; 18; 90; 99; 12; oddělíme 102 a 18.

Zbytek 1 mají čísla 43; 22; 301; 7; oddělíme 43 a 22.

Zbytek 2 mají čísla 14; 11; 32; 35; 29; 62; oddělíme 14 a 32; 14 a 11; 29 a 62. Pak v levé horní části obdélníka vyjde první oddělená část (skládá se ze dvou prázdných čtverečků a čísel 43; 102; 14). Řešení je na následujícím obrázku:

		14	32		
43	102	11			90
22	18		301		7
	35		99	29	
12				62	

3. *Urči počet zlomků, jejichž hodnota je celým násobkem tří a čitatel i jmenovatel jsou trojmístná přirozená čísla.*

Řešení. Aby hodnota zlomků byla násobkem tří a zároveň i v čitateli byla trojmístná přirozená čísla, mohou být ve jmenovateli pouze

▷ čísla 100 až 333 a v čitateli jejich trojnásobek (234 zlomků);

▷ čísla 100 až 166 a v čitateli jejich šestinásobek (67 zlomků);

▷ čísla 100 až 111 a v čitateli jejich devítinásobek (12 zlomků).

Celkem existuje $234 + 67 + 12 = 313$ takových zlomků.

4. *Dědeček nesl do mlýna pytel zrní. Najednou mu začala zrníčka z pytle vypadávat a za dědečkem zůstávala cestička značená jednotlivými zrníčky. Tři ptáčci si toho všimli a začali jednotlivá zrníčka zobat. První zobal zrníčka zelený ptáček, a to tak, že sezobal každé čtvrté zrnko ležící na zemi. Potom přiletěl zobat červený ptáček a sezobl každé páté na zemi ležící zrnko. Nakonec slétl na cestičku modrý ptáček a sezobal každé třetí na zemi ležící zrníčko. Kolik zrníček dědeček ztratil, jestliže ptáčci sezobali dohromady 79 zrníček?*

Řešení. Je vhodné nakreslit si několik (cca 30) prvních zrnek a povšimnout si, že z každé dvacítky vytroušených zrnek bude vyzobáno 12 zrnek:

zelený ptáček zobe 4., 8., 12., 16., 20. zrnko;

červený ptáček zobe 6., 13., 19. zrnko (původního pořadí);

modrý ptáček zobe 3., 9., 14., 18. zrnko (původního pořadí).

Protože $79 = 6 \cdot 12 + 7 \ldots$, bude vytroušeno 6 dvacítek zrnek a ze sedmé dvacítky ještě několik zrnek, z nichž bude sezobnuto 3., 4., 6., 8., 9., 12., 13. zrnko.

Děda vytrousil 6 dvacítek zrnek a ještě 13 zrnek, tj. $6 \cdot 20 + 13 = 133$ (zrnek).

Poznámka. Nemohl jich vytrousit více, protože následující 134. zrnko není zrovna to, které by zůstalo ležet na zemi, ale to, jež by ptáčci sezobli.

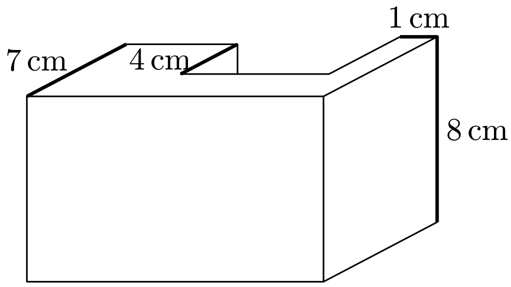
5. *Aspoň trojmístné číslo s navzájem různými ciframi, jehož žádné tři za sebou jdoucí číslice a, b, c nesplňují ani $a < b < c$, ani $a > b > c$, se nazývá* vlnité. *Napiš*

a) největší vlnité číslo, které není dělitelné 3,

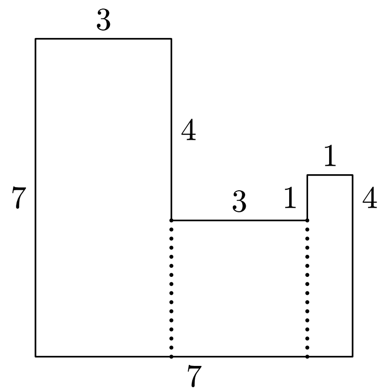
b) největší vlnité číslo dělitelné 150.

Řešení. a) Největší „vlnité“ číslo, které není dělitelné třemi, je 978 563 402.
b) Největší „vlnité“ číslo, které je dělitelné číslem 150, je 9 784 623 150.

6. *Osmiboký kolmý hranol načrtnutý na obrázku vznikl slepením tří kvádrů. Zjisti objem a povrch tohoto hranolu, pokud víš, že mezi osmi jeho bočními stěnami jsou čtyři dvojice shodných stěn, a znáš délky vyznačených hran (obrázek je nepřesný, nevyplatí se měřit).*



Řešení. Určíme půdorys hranolu (obr.):



Obsah podstavy: $S_p = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 34$ (cm^2).
Objem hranolu: $V = S_p \cdot v = 34 \cdot 8 = 272$ (cm^3).
Povrch hranolu: $S = 2 \cdot (34 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 7 \cdot 8 + 1 \cdot 8) = 308$ (cm^2).

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z8

1. *Z číslic* 1,2,...,9 *jsme vytvořili tři smíšená čísla* $a\frac{b}{c}$. *Potom jsme tato tři čísla správně sečetli. Jaký nejmenší součet jsme mohli dostat? (Každou číslici jsme použili právě jednou.)*

ŘEŠENÍ. Další dvě smíšená čísla si označíme $d\frac{e}{f}$ a $g\frac{h}{i}$. Má-li být součet těchto tří čísel nejmenší možný, musí být především nejmenší možný součet $a + d + g$. Použijeme tedy číslice 1, 2, a 3. Dále nám zbývají zlomky. Má-li být jejich součet co nejmenší, musí být v jejich jmenovatelích co největší čísla, tedy 7, 8, a 9. Dále vyzkoušíme všechny možnosti, jak doplnit čísla do čitatelů (protože budeme tyto zlomky porovnávat, je výhodnější je nekrátit):

$$\frac{4}{7}+\frac{5}{8}+\frac{6}{9}=\frac{939}{504}, \tag{a}$$
$$\frac{4}{7}+\frac{6}{8}+\frac{5}{9}=\frac{946}{504}, \tag{b}$$
$$\frac{5}{7}+\frac{4}{8}+\frac{6}{9}=\frac{948}{504}, \tag{c}$$
$$\frac{5}{7}+\frac{6}{8}+\frac{4}{9}=\frac{962}{504}, \tag{d}$$
$$\frac{6}{7}+\frac{4}{8}+\frac{5}{9}=\frac{964}{504}, \tag{e}$$
$$\frac{6}{7}+\frac{5}{8}+\frac{4}{9}=\frac{971}{504}. \tag{f}$$

Je zřejmé, že nejmenší možný součet dostaneme v prvním případě, a to:

$$1+\frac{4}{7}+2+\frac{5}{8}+3+\frac{6}{9}=6+\frac{939}{504}=7\,\frac{145}{168}.$$

2. *Král si nechal nalít plnou číši vína. Pětinu vína z ní upil. Pak si nechal číši dolít vodou a upil čtvrtinu obsahu. Opět mu číši dolili vodou a král z ní upil třetinu. Páže mu zase číši dolilo vodou. Kolik procent čistého vína zbylo ve sklenici?*

ŘEŠENÍ. Je důležité si uvědomit, že doléváním vody se množství čistého vína v číši nemění. A když král upil z číše ředěného vína např. třetinu, znamená to, že upil třetinu čistého vína v číši a třetinu vody v číši. Takže stačí pouze sledovat množství čistého vína ve sklenici.

Poprvé: vypil $\frac{1}{5}$ vína, zbyly $\frac{4}{5}$ vína.

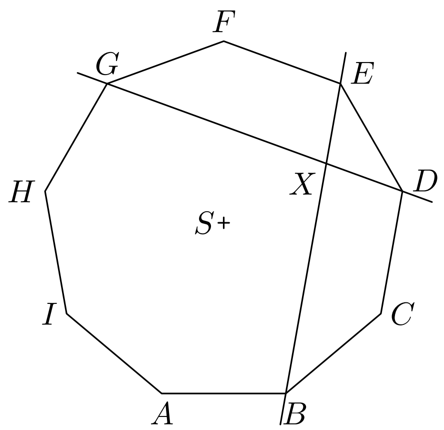
Podruhé: vypil $\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ vína, zbyly $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$ vína.

Potřetí: vypil $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$ vína, zbyly $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$ vína.

Ve sklenici nakonec zbyly $\frac{2}{5}$ čistého vína, což je 40 % (zbytek byla voda).

3. *Je dán pravidelný devítiúhelník $ABCDEFGHI$. Vypočítejte velikost úhlu, který svírají přímky DG a BE.*

Řešení. Označme S střed pravidelného devítiúhelníku a X průsečík přímek DG a BE (obr.). Všimneme si trojúhelníku BGX, ve kterém máme určit velikost úhlu GXB (resp. GXE; zajímá nás ten, který je menší). K tomu potřebujeme znát velikosti ostatních vnitřních úhlů.



Pravidelný devítiúhelník je možno rozdělit na devět shodných rovnoramenných trojúhelníků se společným vrcholem S. Vnitřní úhel při vrcholu S u každého z těchto trojúhelníků má velikost $360^\circ : 9 = 40^\circ$.

Nyní určíme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku SBG (je rovněž rovnoramenný, se základnou BG):

$$|\sphericalangle BSG| = 4 \cdot 40^\circ = 160^\circ,$$
$$|\sphericalangle SBG| = |\sphericalangle SGB| = (180^\circ - 160^\circ) : 2 = 10^\circ.$$

Dále zjistíme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku SDG (rovnoramenný se základnou DG):

$$|\sphericalangle DSG| = 3 \cdot 40^\circ = 120^\circ,$$
$$|\sphericalangle SGD| = |\sphericalangle SDG| = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ.$$

Analogicky vypočteme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku SBE (rovnoramenný se základnou BE):

$$|\sphericalangle BSE| = 3 \cdot 40^\circ = 120^\circ,$$
$$|\sphericalangle SBE| = |\sphericalangle SEB| = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ.$$

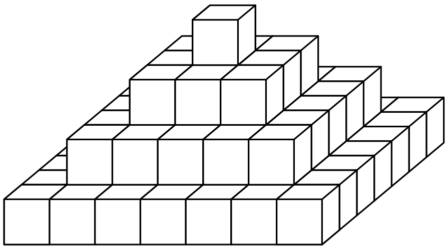
Nyní zpátky k trojúhelníku BGX:

$$\begin{aligned} |\sphericalangle BXG| = 180^\circ - |\sphericalangle GBX| - |\sphericalangle BGX| &= \\ = 180^\circ - (|\sphericalangle GBS| + |\sphericalangle SBE|) - (|\sphericalangle BGS| + |\sphericalangle SGD|) &= \\ = 180^\circ - (10^\circ + 30^\circ) - (10^\circ + 30^\circ) = 100^\circ. \end{aligned}$$

Odtud $|\sphericalangle GXE| = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Přímky BE a DG svírají úhel 80°.

4. *Žáci postavili z malých kostek pyramidu podobnou té na obrázku, měla však více pater. Pyramida, svého druhu největší na světě, stála od té doby na dvoře školy a pršelo na ni. Po čase se musely všechny kostky, na které pršelo, tedy ty na povrchu, vyměnit. Vyměnilo se celkem 2 025 kostek. Kolik měla pyramida pater?*



Řešení. Každé patro pyramidy je tvořeno jednou vrstvou kostek, které jsou uspořádané do čtverce (tj. na každé straně tohoto patra je stejný počet kostek). Po odebrání všech kostek na povrchu dostaneme tentýž typ pyramidy, jen o jedno patro nižší. To znamená, že odebrané kostky lze uspořádat do čtverce, který odpovídá nejnižšímu patru původní pyramidy. Nejprve zjistíme, kolik kostek je na straně tohoto patra:

$$x^2 = 2\,025,$$
$$x = 45 \text{ kostek.}$$

Zbývá ještě určit, jakému počtu pater tento počet kostek odpovídá:

1. patro ...	1 kostka
2. patro ...	3 kostky
3. patro ...	5 kostek
⋮	
n. patro ...	$(2n-1)$ kostek

Odtud

$$2n - 1 = 45,$$
$$n = 23 \text{ pater.}$$

Pyramida měla 23 pater.

5. *Je dáno čtyřmístné číslo. Přičteme k němu takové čtyřmístné číslo, které je napsáno číslicemi prvního čísla, ale v opačném pořadí. Kterými čísly je vždy dělitelný tento součet?*

Řešení. Libovolné čtyřmístné číslo lze zapsat jako $1\,000a + 100b + 10c + d$, nově vytvořené číslo (ze zadání úlohy) má potom tvar $1\,000d + 100c + 10b + a$. Sečteme-li tato dvě čísla, dostáváme po úpravě $1\,001(a + d) + 110(b + c)$. Hledáme-li číslo, kterým je tento součet vždy dělitelný, nesmí být závislé na hodnotě číslic. Potřebujeme vlastně zjistit společné dělitele obou členů:

1. člen $1\,001(a + d) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot (a + d)$ je vždy dělitelný čísly: $\underline{1}$, 7, $\underline{11}$, 13, 77, 91, 143, 1 001.

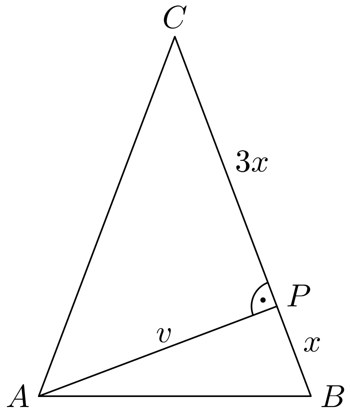
2. člen $110(b + c) = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot (b + c)$ je vždy dělitelný čísly: $\underline{1}$, 2, 5, 10, $\underline{11}$, 22, 55, 110.

Tento součet bude vždy dělitelný čísly 1 a 11.

6. *Výška rovnoramenného trojúhelníku ABC dělí jeho obsah v poměru $1 : 3$. Určete obsah a obvod trojúhelníku ABC, je-li $|AC| = |BC|$ a $|AB| = \sqrt{32}$ cm.*

Řešení. Je důležité si uvědomit, o kterou výšku se jedná: výška na základnu je zároveň těžnicí, takže dělí obsah trojúhelníku v poměru $1 : 1$. Výška v zadání úlohy je tedy výškou na rameno. Tato výška v rozdělí trojúhelník ABC na dva pravoúhlé trojúhelníky. Protože mají jednu odvěsnu společnou a obsahy v poměru $1 : 3$, musí být zbývající odvěsny v poměru $1 : 3$. Označme délku ramen $4x$ a patu výšky v jako P. Nyní mohou nastat dvě situace:

(a) Kratší úsek ramena leží u základny AB.



Sestavíme dvě rovnice z Pythagorovy věty (pro trojúhelník APC a trojúhelník ABP):

$$(3x)^2 + v^2 = (4x)^2,$$
$$x^2 + v^2 = \left(\sqrt{32}\right)^2.$$

Z obou vyjádříme druhou mocninu výšky v:

$$v^2 = 7x^2,$$
$$v^2 = 32 - x^2.$$

Odtud:

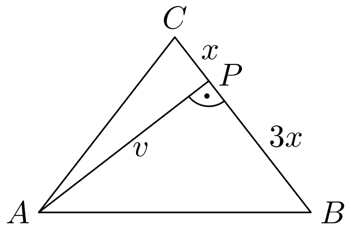
$$7x^2 = 32 - x^2,$$
$$x = 2 \text{ (cm)}.$$

Dále je

$$|AC| = |BC| = 4x = 8 \text{ (cm)},$$
$$|AP| = v = \sqrt{7x^2} = 2\sqrt{7} \text{ (cm)}.$$

Obsah trojúhelníku ABC je $S = \frac{1}{2}|BC| \cdot v = 8\sqrt{7}\,\text{cm}^2$.

Obvod trojúhelníku ABC je $o = 2|BC| + |AB| = 16 + \sqrt{32} = 4\big(4 + \sqrt{2}\big)$ (cm).
(b) Delší úsek ramena leží u základny AB.



Postupujeme analogicky. Sestavíme dvě rovnice z Pythagorovy věty:

$$x^2 + v^2 = (4x)^2,$$
$$(3x)^2 + v^2 = \big(\sqrt{32}\big)^2.$$

Z obou vyjádříme druhou mocninu výšky v:

$$v^2 = 15x^2,$$
$$v^2 = 32 - 9x^2.$$

Odtud:

$$15x^2 = 32 - 9x^2,$$
$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}.$$

Dále je

$$|AC| = |BC| = 4x = \frac{8}{3}\sqrt{3}\,\text{cm},$$
$$|AP| = v = \sqrt{15x^2} = 2\sqrt{5}\,\text{cm}.$$

Obsah trojúhelníku ABC je $S = \frac{1}{2}|BC| \cdot v = \frac{8}{3}\sqrt{15}\,\text{cm}^2$.
Obvod trojúhelníku ABC je $o = 2|BC|+|AB| = \frac{16}{3}\sqrt{3}+\sqrt{32} = 4\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$ (cm).

Komentáře k domácímu kolu kategorie Z9

1. *Kolik šestimístných přirozených čísel má tu vlastnost, že součin jejich číslic je 750?*

Řešení.

$$750 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

Číslice 1, 2, 3 lze uspořádat šesti způsoby:

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321.$$

Dále je třeba vložit do čísla ještě tři pětky. Číslice 1, 1, 6 lze uspořádat třemi způsoby: 116, 161, 611, dále je též třeba vložit tři pětky.

Možnosti:

a) Všechny pětky stojí u sebe. Trojici je možno dát před číslo, za první číslici, za druhou, za třetí, tj. 4 možné způsoby pro každé uspořádání číslic 1, 2, 3 i pro každé uspořádání číslic 1, 1, 6. Získáme $4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 24 + 12 = 36$ možných šestimístných čísel.

b) Dvě pětky stojí u sebe, někde za nimi je zařazena třetí.

- ▷ Stojí-li dvojice před číslem, může třetí pětka stát za první číslicí nebo za druhou nebo za třetí, tj. pro každé uspořádání číslic 1, 2, 3 i každé uspořádání číslic 1, 1, 6 jsou 3 možnosti, celkem $3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 27$.
- ▷ Nebo stojí dvojice 55 za první číslicí; třetí pětka může být umístěna za druhou nebo za třetí číslicí; pro každé uspořádání číslic 1, 2, 3 i 1, 1, 6 jsou 2 možnosti, celkem $2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 12 + 6 = 18$ možností.
- ▷ Nebo stojí dvojice 55 za druhou číslicí, třetí pětka bude stát na konci. Pro každé uspořádání číslic 1, 2, 3 i 1, 1, 6 bude vždy jen jedna možnost, celkem $1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = 6 + 3 = 9$.

Celkově bude $27 + 18 + 9 = 54$ možností.

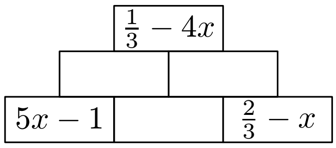
c) Stejný počet možností získáme, zařazujeme-li napřed samotnou pětku, pak dvojici 55. Získáme opět 54 možností.

d) Poslední možnost je, že pětky budou stát osamoceně. Máme pro ně tyto možnosti zařazení: před první číslicí, za první číslicí, za druhou číslicí, za třetí číslicí. Protože umisťujeme jen 3 pětky, musíme vždy jednu z možností vynechat. (Tedy pětky budou stát: před 1. číslicí, za 1. číslicí, za 2. číslicí – nebo: před 1. číslicí, za 1. číslicí, za 3. číslicí – nebo: před 1., za 2., za 3. číslicí – nebo: za 1., za 2., za 3. číslicí). Pro každé uspořádání číslic 1, 2, 3 i 1, 1, 6 máme 4 možnosti, celkem $4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 36$.

Závěr. Možných šestimístných čísel je $36 + 54 + 54 + 36 = 180$.

Poznámka. Možných uspořádání šesti číslic je 6!. Protože jsou tři stejné, počet se zmenšuje 3!krát, tedy $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 : (3 \cdot 2 \cdot 1) = 120$. Jsou-li mezi šesti číslicemi 2 a 3 stejné, je možný počet uspořádání $6! : (3! \cdot 2!) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! : (3! \cdot 2) = 60$. Celkem: $120 + 60 = 180$.

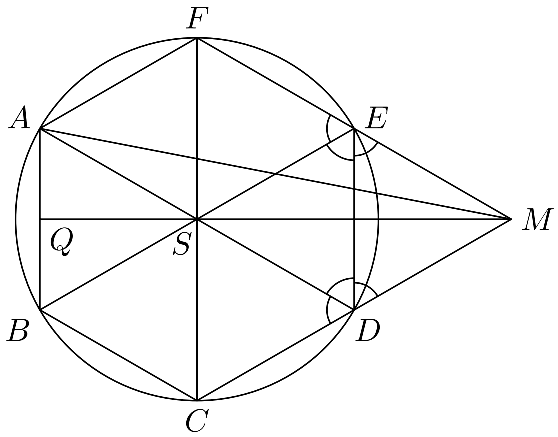
2. *Vyplňte správnými výrazy prázdná pole ve sčítací pyramidě na obrázku. Ve správně vyplněné sčítací pyramidě se v každém poli (kromě těch ze spodního patra) nachází součet výrazů, které jsou napsány ve dvou polích těsně pod ním.*



Řešení. Prostřední spodní kámen označíme m. Ve druhé řadě dostaneme pro kameny $5x - 1 + m$, $\frac{2}{3} - x + m$, v nejvyšší řadě $4x - \frac{1}{3} + 2m = \frac{1}{3} - 4x$. Odtud $m = \frac{1}{3} - 4x$ a po dosazení získáme ve druhé řadě $x - \frac{2}{3}$, $1 - 5x$. Ověříme zkouškou, že v nejvyšší řadě skutečně získáme $\frac{1}{3} - 4x$.

3. *Do kružnice s poloměrem 2 cm je vepsán pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Přímky FE a CD se protínají v bodě M. Určete délku úsečky AM.*

Řešení. Střed kružnice označme S, střed strany AB označme Q. Trojúhelníky ABS, EDS a EDM jsou shodné (obr.). (Shodnost trojúhelníků EDS a EDM plyne



z poznatku, že všechny vyznačené úhly mají velikost $60°$ a že oba trojúhelníky mají společnou stranu ED.) $|QS|$ je délka výšek zmíněných trojúhelníků. Určíme ji podle Pythagorovy věty pro trojúhelník AQS.

$$|AS|^2 = |AQ|^2 + |QS|^2,$$
$$|QS| = \sqrt{|AS|^2 - |AQ|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Je zřejmé, že $|QM| = 3|QS| = 3\sqrt{3}$. Velikost úsečky AM určíme podle Pythagorovy věty pro trojúhelník AQM.

$$|AM|^2 = |AQ|^2 + |QM|^2,$$
$$|AM| = \sqrt{|AQ|^2 + |QM|^2} = \sqrt{1^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{28} \approx 5{,}3 \text{ (cm)}.$$

Délka úsečky AM je přibližně 5,3 cm.

4. *Matematické soutěže se zúčastnilo 142 žáků. Ne každý však odevzdal třetí úlohu. Když nakonec autor soutěže zpracovával statistiku, zapsal si, že odevzdané třetí úlohy ohodnotil průměrně 3,9 bodu (zaokrouhleno na desetiny) a každý soutěžící dostal za třetí úlohu průměrně 2,7 bodu (zaokrouhleno na desetiny). Kolik žáků mohlo odevzdat třetí úlohu? Uděloval se pouze celý počet bodů, za neodevzdanou úlohu bylo 0 bodů.*

Řešení. Nezaokrouhlený průměrný počet bodů počítaný vzhledem k počtu odevzdaných prací označme a. Nezaokrouhlený průměrný počet bodů počítaný vzhledem k počtu soutěžících označme b. Platí:

$$3{,}85 \leqq a < 3{,}95,$$
$$2{,}65 \leqq b < 2{,}75.$$

Za úlohu bylo uděleno celkem $142 \cdot b$ bodů, odevzdalo ji $\frac{142 \cdot b}{a}$ soutěžících. Podíl kladných čísel je co možná nejmenší, pokud je dělenec co nejmenší a dělitel co největší. Obdobně určíme i největší podíl. Pro počet odevzdaných úloh x platí:

$$\frac{142 \cdot 2{,}65}{3{,}95} < x < \frac{142 \cdot 2{,}75}{3{,}85}.$$

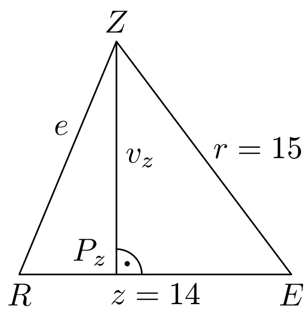
Je tedy přibližně

$$95{,}27 < x < 101{,}43.$$

Třetí úlohu mohlo odevzdat 96 až 101 soutěžících.

5. *Trojúhelník REZ s obsahem $84\,cm^2$ ($|RE| = 14\,cm$, $|ZE| = 15\,cm$) jsme dvěma přímými řezy rozdělili na tři části a z těch jsme složili (bez překrývání) obdélník. Jaké rozměry mohl obdélník mít? Najděte všechny možnosti.*

Řešení. Nejprve určíme v trojúhelníku REZ délku zbývající strany a délky všech tří výšek. Výšku ke straně z určíme pomocí obsahu a strany z.



$$S = \frac{1}{2} z v_z,$$
$$v_z = \frac{2S}{z} = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12 \text{ (cm)}.$$

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ZP_ZE určíme délku P_ZE (P_Z je pata výšky ke straně z):

$$|ZE|^2 = |ZP_Z|^2 + |P_ZE|^2,$$
$$|P_ZE| = \sqrt{|ZE|^2 - |ZP_Z|^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ (cm)}.$$

Je zřejmé, že $|RP_Z| = |RE| - |P_ZE| = 14 - 9 = 5$. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník RP_ZZ určíme délku RZ.

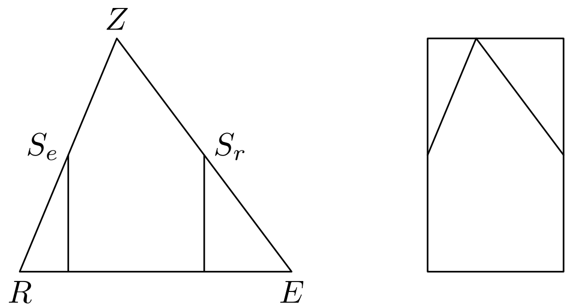
$$|RZ|^2 = |ZP_Z|^2 + |RP_Z|^2,$$
$$|RZ| = \sqrt{|ZP_Z|^2 + |RP_Z|^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (cm)}.$$

Stejným způsobem jako v prvním kroku řešení určíme i délky zbylých dvou výšek.

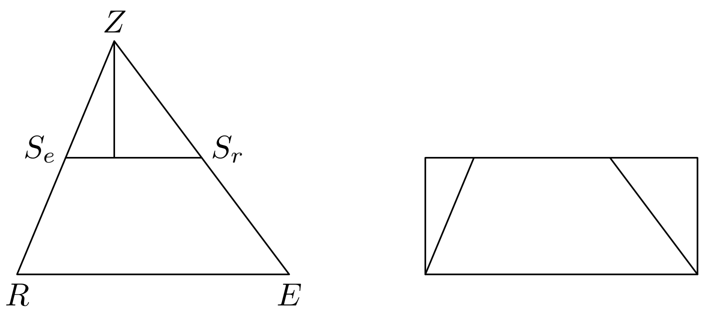
$$v_e = \frac{2S}{e} = \frac{2 \cdot 84}{13} = 12\frac{12}{13} \text{ (cm)},$$
$$v_r = \frac{2S}{e} = \frac{2 \cdot 84}{15} = 11{,}2 \text{ (cm)}.$$

Obdélník můžeme rozřezat více způsoby.

1) S_e a S_r jsou středy stran e a r. Řezy jsou kolmé ke straně z a procházejí body S_e a S_r. Vzniklý obdélník má rozměry $\frac{1}{2}z$ a v_z. Obdobným řezáním, avšak s použitím jiné středné než S_eS_r, získáme další dva různé obdélníky (s rozměry $\frac{1}{2}e$, v_e a $\frac{1}{2}r$, v_r).



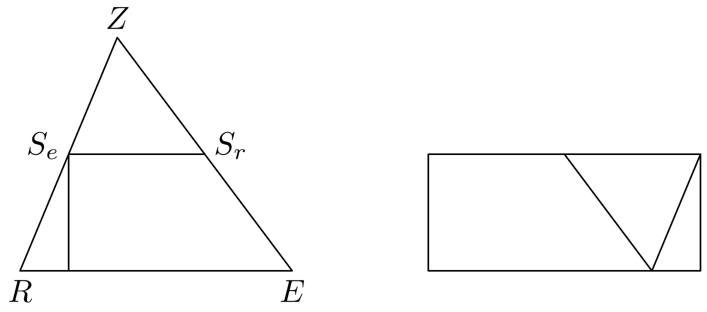
2) Jedním řezem je středná S_eS_r. Druhý řez je kolmý k této středné a prochází vrcholem Z. Vzniklý obdélník má rozměry z a $\frac{1}{2}v_z$. Obdobným řezáním, avšak s použitím jiné středné než S_eS_r, získáme další dva různé obdélníky (s rozměry e, $\frac{1}{2}v_e$ a r, $\frac{1}{2}v_r$).



Popsaným způsobem můžeme získat 6 různých obdélníků. Jejich rozměry v centimetrech jsou:

$$7 \times 12;\quad 6{,}5 \times 12\frac{12}{13};\quad 7{,}5 \times 11{,}2;\quad 14 \times 6;\quad 13 \times 6\frac{6}{13};\quad 15 \times 5{,}6.$$

Poznámka. Obdélníky uvedené v části 2 lze získat i pomocí jiných řezů (viz obrázek). Plným počtem bodů ohodnoťte i práce žáků, které neobsahují tento postřeh.



6. *Dokažte, že číslo*

$$(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2003 \cdot 2005) + (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2004 \cdot 2006)$$

je dělitelné číslem 2007^4.

Řešení. Číslo $2007 = 9 \cdot 223$. Budou-li oba sčítanci dělitelní $9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ a současně $223^4 = 223 \cdot 223 \cdot 223 \cdot 223$, bude součet dělitelný $2\,007^4$. V prvním sčítanci se vyskytují činitelé

$$9;\quad 3 \cdot 9 = 27;\quad 5 \cdot 9 = 45;\quad 7 \cdot 9 = 63$$

a dále

$$223;\quad 3 \cdot 223 = 669;\quad 5 \cdot 223 = 1115;\quad 7 \cdot 223 = 1561;$$

ve druhém sčítanci

$$2 \cdot 9 = 18;\quad 4 \cdot 9 = 36;\quad 6 \cdot 9 = 54;\quad 8 \cdot 9 = 72;$$

a dále

$$2 \cdot 223 = 446;\quad 4 \cdot 223 = 892;\quad 6 \cdot 223 = 1338;\quad 8 \cdot 223 = 1784.$$

Předpoklad je splněn, v obou sčítancích se vyskytují čtyřikrát činitelé 9 i 223, tedy daný výraz je dělitelný číslem $2\,007^4$.