55. ročník Matematické olympiády

III. kolo kategorie Z9

Z9–III–1

Doplňte do čtverečků přirozená čísla tak, aby:
- ▷ součet všech doplněných čísel byl 44,
- ▷ součet čísel v každém čtyřčtverečkovém čtverci byl stejný,
- ▷ nejmenší doplněné číslo bylo liché,
- ▷ uprostřed čtverce bylo jednociferné číslo.

	7	
8		4
	2	

(*S. Bednářová*)

Řešení. Označme x číslo v prostředním čtverečku a a číslo v levém horním čtverečku. Potom je součet čísel v levém horním čtyřčtverečkovém čtverci $a+7+8+x=a+x+15$.

Dále určíme číslo v pravém horním čtverečku. Aby byl součet čísel v pravém horním čtyřčtverečkovém čtverci stejný jako v předchozím (tj. $a+x+15$), musí být v pravém horním čtverečku napsané číslo $a+4$ (čísla 7 a x jsou v obou dvou čtvercích, musí tedy být součet zbývajících dvou čísel $8+a$).

Stejným způsobem určíme, že v levém dolním čtverečku je číslo $a+5$ (čísla 8 a x jsou v obou čtyřčtverečkových čtvercích — levém horním i levém dolním, součet zbývajících dvou čísel je $a+7$).

Nakonec doplníme i číslo do pravého dolního čtverečku: $a+9$

Součet všech doplněných čísel je podle zadání 44, odtud:

$$\begin{aligned} x+a+(a+4)+(a+5)+(a+9)&=44,\\ x+4a+18&=44,\\ x+4a&=26,\\ x&=26-4a. \end{aligned}$$

Možné dvojice čísel x, a uvádí následující tabulka:

a	1	2	3	4	5	6
x	22	18	14	10	6	2

Nejmenší z doplněných čísel má být liché. Dále víme, že uprostřed (tj. x) má být jednociferné číslo. Vyhovuje jen jediná dvojice: $a=5$ a $x=6$.

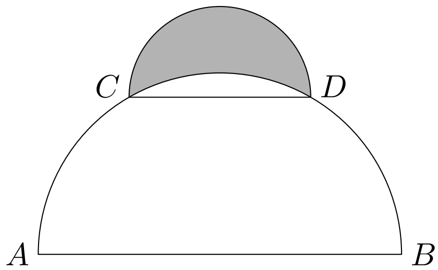
Po doplnění všech čísel dostaneme:

5	7	9
8	6	4
10	2	14

Z9–III–2

Určete obsah šedého měsíčku z obrázku, pokud víte, že průměr AB větší polokružnice má délku 2 cm, průměr CD menší polokružnice má délku 1 cm a platí $AB \parallel CD$.

(*P. Tlustý*)



Řešení. Označme S střed úsečky AB. Trojúhelník SCD je rovnostranný (s délkou strany 1 cm). Obsah šedého měsíčku vypočítáme tak, že od obsahu menšího půlkruhu (s průměrem 1 cm) odečteme obsah úseče většího kruhu.

Obsah menšího půlkruhu:

$$S_M = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}\,\mathrm{cm}^2.$$

Obsah úseče: Vypočteme ho jako rozdíl obsahu příslušné kruhové výseče (šestina obsahu většího kruhu) a obsahu rovnostranného trojúhelníku SCD.

Obsah výseče:

$$S_V = \frac{1}{6}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{6}\,\mathrm{cm}^2.$$

Obsah trojúhelníku: strana měří 1 cm, výška $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ cm,

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{cm}^2.$$

Obsah šedého měsíčku:

$$S = S_M - (S_V - S_\triangle) = \frac{\pi}{8} - \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{24}\right)\mathrm{cm}^2$$

Z9–III–3

Kuba našel ve sklepě tři krabice tvaru kvádru se čtvercovou podstavou. První byla dvakrát vyšší než druhá. Druhá byla 1,5krát širší než první. Třetí byla třikrát vyšší než první a dvakrát užší než první. V jakém poměru jsou objemy krabic? (*M. Raabová*)

Řešení. Zadání zaneseme do přehledné tabulky:

krabice	délka podstavné hrany	výška
první	a_1	$v_1 = 2v_2$
druhá	$a_2 = 1{,}5a_1$	v_2
třetí	$a_3 = 0{,}5a_1$	$v_3 = 3v_1$

Rozměry nádob vyjádříme pomocí a_3 a v_2:

krabice	délka podstavné hrany	výška
první	$a_1 = 2a_3$	$v_1 = 2v_2$
druhá	$a_2 = 3a_3$	v_2
třetí	a_3	$v_3 = 6v_2$

Pomocí těchto údajů vyjádříme objemy všech krabic:

$$\begin{aligned} \text{první nádoba:}\quad & V_1 = (2a_3)^2 \cdot 2v_2 = 8a_3^2v_2, \\ \text{druhá nádoba:}\quad & V_2 = (3a_3)^2 \cdot v_2 = 9a_3^2v_2, \\ \text{třetí nádoba:}\quad & V_3 = a_3^2 \cdot 6v_2 = 6a_3^2v_2. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že objemy nádob jsou v poměru 8 : 9 : 6.

Z9–III–4

Při přijímacích zkouškách na univerzitu je každému zájemci o studium přidělován krycí kód složený z pěti číslic. Zkoušky organizoval důkladný, leč pověrčivý docent, který se před přidělováním kódů rozhodl vyřadit ze všech možných kódů (tj. 00000 až 99999) ty, které v sobě obsahovaly číslo 13, tedy číslici 3 bezprostředně následující po číslici 1. Kolik kódů musel docent vyřadit? (*L. Šimůnek*)

Řešení. Nejprve zjistíme, kolik kódů obsahuje jednou číslo 13:

Kódy typu 13$***$: Na třetím, čtvrtém a pátém místě může být každá z deseti číslic, tedy $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$ kódů.

Kódy typu $*$13$**$: Stejným způsobem zjistíme, že jich je opět 1 000.

Kódy typu $**$13$*$: 1 000 kódů.

Kódy typu $***$13: 1 000 kódů.

Celkem 4 000 kódů. V nich jsou ovšem započítány i ty, které obsahují dvě čísla 13. Nyní zjistíme, kolik takových kódů je:

kódy typu 1313$*$: 10 kódů,

kódy typu 13$*$13: 10 kódů,

kódy typu $*$1313: 10 kódů.

Celkem 30 kódů se dvěma čísly 13. Tyto kódy jsme předtím započítali dvakrát. A protože jsme už vyčerpali všechny možnosti, je celkový počet kódů $4\,000 - 30 = 3\,970$.

Pověrčivý docent vyřadil 3 970 kódů.