

II. kolo kategorie Z8

Z8-II-1

Každé písmeno tabulky nahrazuje určité přirozené číslo (stejná písmena představují stejná čísla). Známe součty hodnot ve třetím řádku, ve čtvrtém řádku a v prvním sloupci. Určete alespoň jednu vyhovující čtveřici čísel, jimiž lze nahradit písmena A , B , C , D .

D	A	C	B	
C	B	D	A	
B	C	B	C	50
D	A	A	A	45
85				

(Š. Ptáčková)

ŘEŠENÍ. Ve třetím řádku se vyskytuje dvakrát součet $B + C$ a celkový součet je 50. Tedy $B + C = 25$.

V prvním sloupci je součet $B + C$ a ještě $2D$ a celkový součet je 85. Protože $B + C$ je 25, je $2D = 85 - 25 = 60$. Odtud plyne, že $D = 30$.

V posledním řádku se vyskytuje $D + 3A$, celkový součet je 45. Tedy $3A = 45 - 30 = 15$, proto $A = 5$.

Zvolíme čtveřici čísel A , B , C , D tak, aby platilo $A = 5$, $B + C = 25$, $D = 30$.

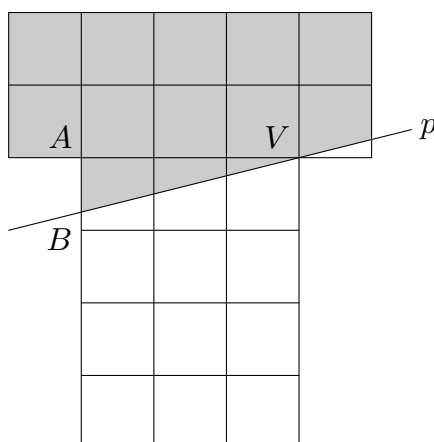
Vyhovuje například čtveřice: $A = 5$, $B = 10$, $C = 15$, $D = 30$.

(Úlohu lze řešit i pomocí rovnic, které popisují výše provedené úvahy.)

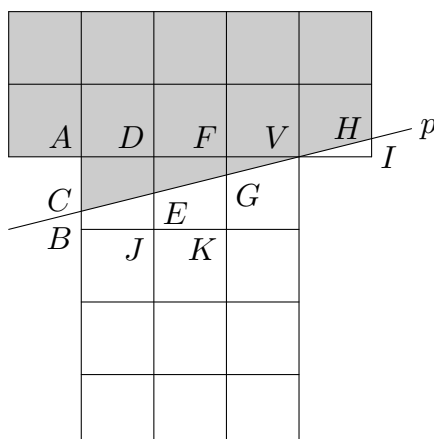
Z8-II-2

Máme obrazec ve tvaru T složený z 22 čtverečků o straně 1 cm. Bodem V prochází přímka p , která rozděluje obrazec na dvě části, bílou a šedou. Určete, v jakém poměru rozděluje přímka p úsečku AB , víte-li, že obsahy bílé a šedé plochy jsou stejné.

(L. Šimůnek)



ŘEŠENÍ. Trojúhelníky VFG a VIH jsou shodné (dle věty *usu*: GVF a HVI jsou vrcholové úhly, $|VF| = |VI|$, $|\sphericalangle VFG| = |\sphericalangle VIH| = 90^\circ$).



Můžeme proto pomyslně nabarvit trojúhelník VIH na šedo a trojúhelník VFG na bílo, aniž by se změnilo poměrné zastoupení barev.

Po této úpravě máme deset jednotkových čtverců bílých, deset šedých a dva dvojbarevné. Aby obě barvy zaujímaly plochu s tímž obsahem, musí úsečka CG dělit obdélník $ABKF$ na dva shodné lichoběžníky. Platí tedy

$$|DE| = |JE| = 0,5.$$

Úsečka FG je střední příčkou trojúhelníku DEV , proto

$$|FG| = \frac{|DE|}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25.$$

Ze shodnosti zmiňovaných lichoběžníků plyne $|BC| = |FG| = 0,25$. Je zřejmé, že $|AC| = |AB| - |BC| = 1 - 0,25 = 0,75$. Přímka p rozděluje úsečku AB v poměru

$$\frac{0,75}{0,25} = \frac{3}{1}.$$

ŘEŠENÍ S UŽITÍM PODOBNOSTI: Trojúhelníky VAC a VIH jsou podobné v poměru $3 : 1$. Obsah trojúhelníku VIH označme S , obsah trojúhelníku VAC je tedy $9S$. Obsahy šedé a bílé plochy se rovnají, proto $10 - S + 9S = 12 - 9S + S$, a tudíž

$$S = \frac{1}{8}.$$

Ze vztahu pro výpočet obsahu trojúhelníku VIH ,

$$S = \frac{1}{2}|VI| \cdot |IH|,$$

získáme $|IH| = 0,25$. Z poměru podobnosti zmiňovaných trojúhelníků vyplývá, že $|AC| = 3|HI| = 3 \cdot 0,25 = 0,75$, tedy $|AC| = 0,75$. Přímka p rozděluje úsečku AB v poměru

$$\frac{0,75}{0,25} = \frac{3}{1}.$$

Z8–II–3

Majka vytvořila posloupnost čísel, ve které je každé následující číslo součtem druhých mocnin číslic předcházejícího čísla. Vypište prvních 10 členů této posloupnosti, pokud je její první člen číslo 29. Které číslo je v posloupnosti na 2 006. místě? (*M. Dillingerová*)

ŘEŠENÍ. Prvních deset členů posloupnosti bude

29; 85; 89; 145; 42; 20; 4; 16; 37; 58.

Desátý člen má stejné číslice jako druhý člen, řada čísel

89; 145; 42; 20; 4; 16; 37; 58

se tedy bude stále opakovat. V posloupnosti budou na začátku čísla 29 a 85. Ve zbývajících 2 004 číslech bude 250 stejných osmic (protože $2\,004 = 8 \cdot 250 + 4$) a první čtyři čísla z osmice (tj. 89, 145, 42, 20). Na posledním, 2 006. místě bude číslo 20.