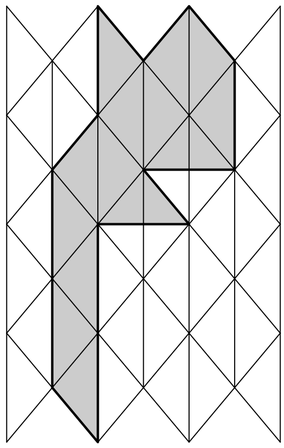
55. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

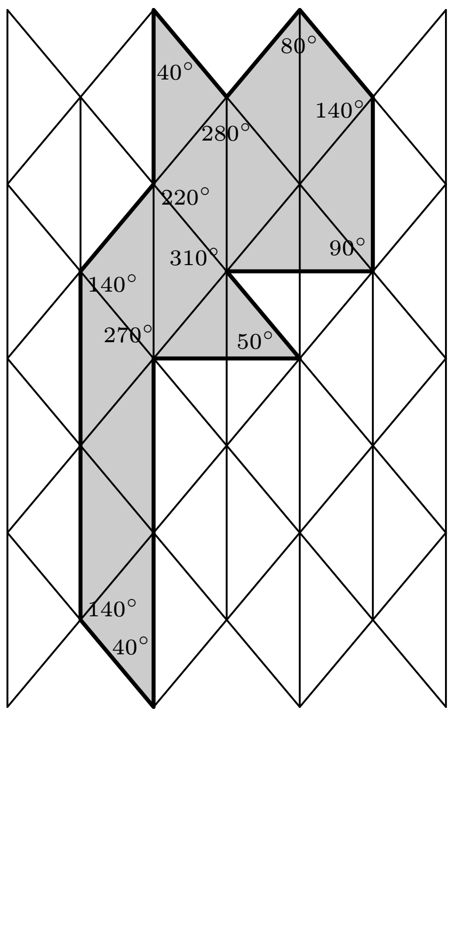
II. kolo kategorie Z7

Z7–II–1

Síť na obrázku je složena ze shodných rovnoramenných trojúhelníků, z nichž každý má obsah $2\,\mathrm{cm}^2$, přičemž některý z vnitřních úhlů trojúhelníku měří $100°$. Zjistěte obsah a velikost vnitřních úhlů mnohoúhelníku znázorněného v této trojúhelníkové síti. (Pozor, obrázek může být velmi nepřesný.) (*S. Bednářová*)



Řešení. Měří-li některý z vnitřních úhlů rovnoramenného trojúhelníku $100°$, nemůže to být úhel při základně (pak by byl součet vnitřních úhlů větší než $200°$). Znamená to, že $100°$ měří úhel při hlavním vrcholu a úhly při základně $40°$. Po doplnění velikostí úhlů do obrázku dostáváme:



Obsah mnohoúhelníku: Daný mnohoúhelník lze rozdělit na 12 celých trojúhelníků a 4 poloviny těchto trojúhelníků. Má-li každý trojúhelník sítě obsah $2\,\mathrm{cm}^2$, je obsah vyznačeného mnohoúhelníku $12 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 28\,\mathrm{cm}^2$.

Z7–II–2

Najdi všechna čtyřmístná čísla, která se po škrtnutí prostředních dvou cifer zmenší 120krát. (*S. Bednářová*)

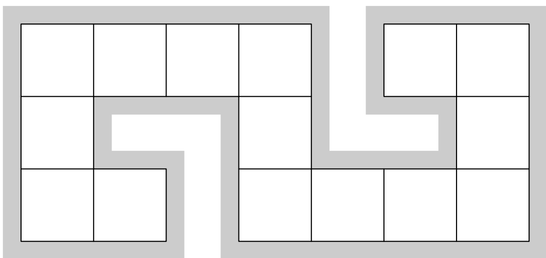
Řešení. Jestliže se číslo po škrtnutí prostředních dvou číslic zmenší 120krát, musí být na místě jednotek 0 (původní číslo je dělitelné 120). Dále to znamená, že dvojciferné číslo vzniklé škrtáním je násobek 10. Zaneseme do tabulky všechny takové možnosti a z nich vybereme ty, které vyhovují zadání.

$120 \cdot 10 = 1\,200$	vyhovuje
$120 \cdot 20 = 2\,400$	vyhovuje
$120 \cdot 30 = 3\,600$	vyhovuje
$120 \cdot 40 = 4\,800$	vyhovuje
$120 \cdot 50 = 6\,000$	nevyhovuje
$120 \cdot 60 = 7\,200$	nevyhovuje
$120 \cdot 70 = 8\,400$	nevyhovuje
$120 \cdot 80 = 9\,600$	nevyhovuje
$120 \cdot 90 = 10\,800$	nevyhovuje

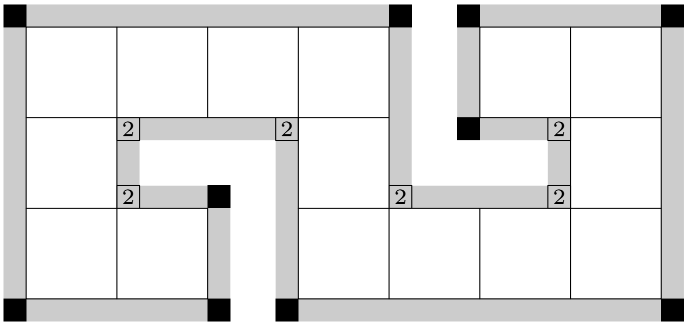
Vyhovují čísla: 1 200, 2 400, 3 600, 4 800.

Z7–II–3

Král Originál I. si sám navrhl a nechal vybudovat bazén. Na obrázku vidíte, jak vypadá při pohledu shora. Dno je pokryté čtvercovými dlaždicemi o straně délky 2 metry, betonové stěny jsou 3 metry vysoké a 0,5 metru silné. Zjistěte, kolik kilogramů betonu spotřebovali na stěny bazénu, jestliže $1\,\mathrm{m}^3$ betonu váží 2 000 kg. (*S. Bednářová*)



Řešení. Na následujícím obrázku je naznačeno „dělení“ betonu na jednotlivé části. Ve „vnějších rozích“ jsou vyznačeny tmavé čtverečky a ve „vnitřních rozích“ jsou čtverečky s číslem 2. Oba typy čtverečků mají stejný obsah.



Chceme vypočítat objem stěn bazénu. Představíme si, že jednotlivé stěny stavíme vedle sebe. Tak dostaneme jednu velikou stěnu tvaru kvádru. Výška tohoto kvádru (stejná jako výška bazénu) je 3 metry. Zbývá určit rozměry základny kvádru. Jeden rozměr je zřejmý, je to šířka stěny, která je 0,5 metru. Zbývá určit celkovou délku. Celková délka je obvod bazénu zvětšený o „vnější“ rohy (těch je celkem 10) a zmenšený o „vnitřní“ rohy (těch je celkem 6). Odčítáme proto, že každý „vnitřní“ roh je v obvodu započítán dvakrát.

Nyní už snadno vypočítáme, že celková délka je

$$32 \cdot 2\ \mathrm{m} + 10 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} - 6 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 66\,\mathrm{m}.$$

Kvádr má velikost (v metrech) $66 \times 3 \times 0{,}5$, tj. váží

$$66 \cdot 3 \cdot 0{,}5 \cdot 2\,000\,\mathrm{kg} = 198\,000\,\mathrm{kg}.$$

Na stavbu bazénu se tedy spotřebovalo 198 000 kg betonu.